ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

УДК 517. 5

[1]**В. К. Репета**, канд. фіз.-мат. наук
[2]**Л.А. Репета**, канд. фіз.-мат. наук

НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ КЛАСІВ $\hat{L}^{\psi}_{\beta,1}$ ОПЕРАТОРАМИ СТЕКЛОВА

[1]Інститут комп'ютерних технологій НАУ, e-mail: iit@nau.edu.ua
[2]Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут"

Досліджено поведінку верхніх меж відхилень (ψ,β) *– диференційовних функцій від операторів Стеклова як окремого випадку операторів вигляду* $U^{\varphi,F}_{\sigma}$ *в інтегральній метриці за допомогою інтегральних зображень цих відхилень від лінійних операторів.*

Вступ

У теорії наближення функцій важливе місце займає задача наближення функцій заданого класу $\mathcal{N}$ за допомогою фіксованого лінійного методу, що визначається нескінченною трикутною матрицею чисел

$$\Lambda = \left\| \lambda_k^{(n)} \right\|, \; n = 0, 1, \ldots, \; k = \overline{0, n}.$$

Суть її полягає у дослідженні величини

$$E(\mathcal{N}, U_n(\Lambda))_X \overset{def}{=} \sup_{f \in \mathcal{N}} \left\| f(\cdot) - U_n(f, \cdot, \Lambda) \right\|_X,$$

де $U_n(f, \cdot, \Lambda)$ – поліном, породжений деяким лінійним методом підсумовування рядів Фур'є; X – нормований простір; $\mathcal{N} \in X$ – заданий клас функцій.

На початку XX ст. С.Б. Бернштейн запропонував побудувати теорію наближення функцій, заданих на всій осі, яка вміщує теорію наближення періодичних функцій. Завдяки цій ідеї обидві теорії розвиваються і сьогодні, збагачуючи і доповнюючи одна одну.

Перші результати, що стосуються оцінок верхніх меж відхилень сум Фур'є від заданих неперервних функцій були отримані А. Лебегом у 1909 р., який довів, що

$$| f(\cdot) - S_n(f, \cdot) | \leq (\ln n + 3) E_n(f),$$

де $E_n(f)$ – найкраще наближення функції $f(\cdot)$ тригонометричними поліномами $T_n(\cdot)$ порядку, який не перевищує n у рівномірній метриці.

У 1935 р. А.М. Колмогоров встановив, що при $n \to \infty$ справедлива рівність

$$E(W_1^r, S_n)_C = \sup_{f \in W^r} \| f(\cdot) - S_n(f, \cdot) \|_C =$$

$$= \frac{4 \ln n}{\pi^2 n^r} + O\left(\frac{1}{n^r}\right),$$

де $S_n = S_n(f, \cdot)$ – частинні суми Фур'є; W^r – клас 2π-періодичних функцій $f(\cdot)$, які мають абсолютно неперервну $(r-1)$ похідну, таку, що $\| f^{(r)}(\cdot) \|_C \leq 1, \quad r \in \mathrm{N}$.

Дослідження були продовжені В.Т. Пінкевичем і С.М. Нікольським, які узагальнили результати А.М. Колмогорова на більш широкі класи: $W^r H_\omega$ та $W_1^r, r > 0$.

Ці дослідження поклали початок новому напряму в теорії наближення функцій.

Постановка проблеми

У 1988 р. О.І. Степанцем уведені нові класи функцій $\hat{L}^{\psi}_{\beta}\mathcal{N}$ [1; 2]. Для цих класів О.І. Степанцем було встановлено низку структурних та апроксимативних властивостей та знайдено зв'язок між множинами $\hat{L}^{\psi}_{\beta}\mathcal{N}$ і множинами періодичних функцій $L^{\psi}_{\beta}\mathcal{N}$.

Подальші дослідження верхніх меж відхилень

$$E(\mathcal{N}, U_n(\Lambda))_X \overset{def}{=} \sup_{f \in \mathcal{N}} \left\| f(\cdot) - U_n(f, \cdot, \Lambda) \right\|_X$$

пов'язані з заміною поліномів $U_n(f, \cdot, \Lambda)$ деякими аналогами лінійних методів підсумовування.

Наближення класів $\hat{L}^{\psi}_{\beta}\mathcal{N}$ у рівномірній метриці за допомогою так званих операторів Зигмунда, Стеклова, Рогозинського вивчав М.Г. Дзімістарішвілі [3].

Поведінка верхніх меж відхилень функцій класів $\hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}$ від операторів вигляду $U^{\varphi,F}_{\sigma}$ у рівномірній метриці вивчалась у працях [4; 5].

Мета дослідження – вивчення наближення функцій класів $\hat{L}_\beta^\psi \mathcal{N}$ в інтегральній метриці за допомогою операторів Стеклова як частинного випадку операторів вигляду $U_\sigma^{\varphi,F}$.

Означення та допоміжні твердження

Будемо користуватись означеннями і позначеннями, уведеними О.І. Степанцем.

Нехай $\hat{L}_p$, $p \ge 1$ – множина функцій $\varphi(\cdot)$, заданих на всій дійсній осі Р, які мають скінченну норму $\|\varphi\|_{\hat{p}}$, де

$$\|\varphi\|_{\hat{p}} = \sup_{a\in P}\left(\int_{-\pi}^{\pi}|\varphi(x+a)|^p\,dx\right)^{1/p} \text{ для } p \ge 1$$

і $\|\varphi\|_\infty = \|\varphi\|_M = \operatorname{ess\,sup}|\varphi(x)|$, тобто $\hat{L}_\infty = M$.

Функцію $\psi(x)$ визначено так, що для $x \ge 1$ вона опукла вниз і зникає на нескінченності. Множину таких функцій позначено через $\mathcal{M}$. На проміжку $[0,1)$ функцію $\psi(x)$ довизначено довільним чином, але так, щоб вона була неперервною для $x \ge 0$, $\psi(0) = 0$, а її похідна $\psi'(x) = \psi'(x+0)$ мала обмежену варіацію на проміжку $[0,\infty)$. Множину таких функцій позначено через $\mathcal{N}$.

Крім того, через F' позначено множину функцій, що задовольняють умову

$$\int_0^\infty \frac{|\psi(t)|}{t}dt < \infty.$$

Множина $\mathcal{M}$ неоднорідна за швидкістю спадання до нуля її елементів. Тому О.І. Степанцем [1; 2] з неї виділено підмножини $\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_C$, $\mathcal{M}_\infty$ і показано, що для функцій $\psi \in \mathcal{M}_C$ справедливі співвідношення

$$K_1 t|\psi'(t)| \le \psi(t) \le K_2 t|\psi'(t)|, \quad t \ge 1;$$

$$\int_\sigma^\infty \frac{\psi(t)}{t}dt \le K\psi(\sigma), \quad \sigma > 1.$$

Для функцій $\psi \in \mathcal{M}_0'$, де $\mathcal{M}_0' = \mathcal{M}_0/\mathcal{M}_C$ справедлива нерівність

$$K_1 t|\psi'(t)| \le \psi(t),\ t \ge 1.$$

Для функцій $\psi \in \mathcal{M}_\infty$ виконується співвідношення

$$\psi(t) \le \alpha(t)t|\psi'(t)|,$$

де $\alpha(t)$ – деяка функція, що монотонно спадає до нуля.

Для вивчення апроксимативних властивостей функцій класів $\hat{C}_\beta^\psi \mathcal{N}$ і $\hat{L}_\beta^\psi \mathcal{N}$ у працях [4; 5] використано оператори

$$U_\sigma(f,x,\Lambda) = A_0 + \int_{-\infty}^{\infty} f_\beta^\psi(x+t)\times$$
$$\times\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \lambda_\sigma(v)\psi(v)\cos\left(vt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dv\,dt,$$

які визначає сім'я функцій $\Lambda = \{\lambda_\sigma(x)\}$, неперервних для $\forall x \ge 0$ і залежних від дійсного параметра σ, де

$$\lambda_\sigma(x) = 1 - \frac{\varphi_\sigma(\sigma x)}{\varphi_\sigma(\sigma)}F_\sigma(x).$$

Функції f_β^ψ називають (ψ,β)-похідними функції f.

Класи $\hat{L}_{\beta,1}^\psi$ визначено так:

$$\hat{L}_{\beta,1}^\psi = \{f : f \in \hat{L}_\beta^\psi, \|f_\beta^\psi\|_{\hat{1}} \le 1\},$$

де $\|f_\beta^\psi\|_{\hat{1}} = \sup_{a\in P}\left(\int_{-\pi}^{\pi}|f_\beta^\psi(t+a)|\,dt\right)$.

Нехай $f \in \hat{L}_{\beta,1}^\psi$ і перетворення Фур'є функції

$$\tau_\sigma(x) = \begin{cases}(1-\lambda_\sigma(x))\psi(\sigma x), & x\in[0;1],\\ \psi(\sigma x), & x\in[1;\infty)\end{cases}$$

сумовне на Р, функція $\tau_\sigma(x)$ неперервна для $\forall x \ge 0$.

Нехай функція

$$\tau_\sigma^*(x) = \begin{cases}\sup_{x\ge t}|\hat{\tau}_\sigma(x)|, & t > 0,\\ \sup_{x\le t}|\hat{\tau}_\sigma(x)|, & t < 0\end{cases}$$

сумовна для $|t| > A$, де A – деяке число. Тоді

$$f(x) - U_\sigma^{\varphi,F}(f,x,\Lambda) =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_\beta^\psi\left(x+\frac{t}{\sigma}\right)\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \tau_\sigma(v)\cos\left(xt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dv\,dt$$

майже у кожній точці x.

Наведемо допоміжні твердження [3].

Лема 1. Нехай функції $\tau_\sigma(x)$ неперервні для $x \ge 0$ і збігаються інтеграли

$$A(\tau_\sigma) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_0^\infty \tau_\sigma(x)\cos\left(vt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dx\right|dt.$$

Тоді справедлива рівність

$$E(\hat{C}_{\beta,\infty}^\psi, U_\sigma(\Lambda)) = \sup_{f\in\hat{C}_{\beta\infty}^\psi}|f(x) - U_\sigma(\Lambda)| = A(\tau_\sigma).$$

Лема 2. Для функції $\tau_\sigma(x)$ і її сумовного перетворення Фур'є

$$\tau_\sigma^*(x) \in L\ \ (|t| > A)$$

при $\sigma \to \infty$ справедлива рівність

$$E(\hat{L}^{\psi}_{\beta,1}, U^{\varphi,F}_{\sigma})_{\hat{1}} = A(\tau_\sigma) + \gamma(\sigma),$$

де $\gamma(\sigma) < 0$ і

$$|\gamma(\sigma)| = O\Big(\int\limits_{|t|\geq \frac{\pi\sigma}{2}} \Big|\int\limits_0^\infty \tau_\sigma(x)\cos\Big(xt + \frac{\beta\pi}{2}\Big)dx\Big|\,dt\Big).$$

З цих лем випливає, що верхні межі відхилень $E(\hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}, U_\sigma(\Lambda))$ і $E(\hat{L}^{\psi}_{\beta,1}, U^{\varphi,F}_{\sigma})_{\hat{1}}$ можуть відрізнятися одна від одної на величину, не більшу за порядком ніж

$$a(\tau_\sigma) = \int\limits_{|t|\geq \frac{\pi\sigma}{2}} \Big|\int\limits_0^\infty \tau_\sigma(x)\cos\Big(xt + \frac{\beta\pi}{2}\Big)dx\Big|\,dt.$$

Тому має місце співвідношення

$$E(\hat{L}^{\psi}_{\beta,1}, U^{\varphi,F}_{\sigma})_{\hat{1}} = E(\hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}, U^{\varphi,F}_{\sigma}) + a(\tau_\sigma). \qquad (1)$$

Співвідношення (1) дозволяє узагальнити результати, одержані для класів $\hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}$ і операторів Стеклова, для класів $\hat{L}^{\psi}_{\beta,1}$.

Розглянемо поведінку верхніх меж відхилень $E(\hat{L}^{\psi}_{\beta,1}, U^{\varphi,F}_{\sigma})_{\hat{1}} = \sup\limits_{f \in \hat{L}^{\psi}_{\beta,1}} \| f(x) - U^{\varphi,F}_{\sigma} \|_{\hat{1}}$ для випадку $U^{\varphi,F}_{\sigma}(f, x, \Lambda) = S_{\frac{2\pi}{\sigma}}(\Lambda)$.

Оператори, що задані співвідношенням

$$S_{\frac{2\pi}{\sigma}}(\Lambda) = A_0 + \int\limits_{-\infty}^{\infty} f^{\psi}_{\beta}\Big(x + \frac{t}{\sigma}\Big) \times$$

$$\times \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \lambda_\sigma(v)\psi(\sigma v)\cos\Big(vt + \frac{\beta\pi}{2}\Big)dvdt,$$

назвемо операторами Стеклова.

Оператори $S_{\frac{2\pi}{\sigma}}(\Lambda)$ задає сім'я неперервних для $x \geq 0$ функцій $\Lambda = \{\lambda_{\sigma,r}(x)\}$, де

$$\lambda_\sigma(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin \pi x}{\pi x}, & x \in [0; 1] \\ 0, & x \geq 1. \end{cases}$$

Метод Стеклова є насиченим і має порядок насичення n^{-2}.

Покладемо

$$\varphi(x) = x^2, \quad F(x) = \frac{1 - \dfrac{\sin \pi x}{\pi x}}{x^2}.$$

Задані так функції задовольняють вимоги:

1. Функції $\varphi(x) \in \Phi$, тобто $\varphi(x)$ – неперервні для $x \geq 0$, монотонно не спадають, $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(x)$ – неперервні для $x > 0$.

2. Функції $F(\cdot) \in H$, тобто для $x \in [0; 1]$ вони неперервні і обмежені разом з похідними другого порядку, $F(0) = \dfrac{\pi^2}{6}$, $F(1) = 1$.

З властивостей функції F випливає, що $\forall\, x \in [0; 1]$ справедлива рівність

$$F(x) = F(0) + F^*(x),$$

де $|F^*(x)| \leq Kx$.

При такому заданні функцій $\varphi(x)$ та $F(x)$ видно, що оператори Стеклова є операторами вигляду $U^{\varphi,F}_{\sigma}$. Тому до них можна застосувати ті самі міркування, що і при дослідженні операторів $U^{\varphi,F}_{\sigma}$.

Виведення основних результатів

Розглянемо випадок $\beta = 0$, оскільки при цьому відсутні інтеграли вигляду $\int\limits_1^\infty \psi(x)\sin xt dx$. Зауважимо, що для $\beta = 2k$, $k \in Z$

$$\cos\Big(xt + \frac{\beta\pi}{2}\Big) = (-1)^k \cos xt.$$

Тоді $(-1)^k f(\cdot) \in L_0$ за умови, що $f \in \hat{L}^{\psi}_{2k}$, $k \in Z$.

Теорема 1. Нехай $\psi \in F'$, $\varphi \in \Phi$, $F \in H$, $F^*(x) = F(x) - F(0)$ не змінює знак на відрізку $[0; 1]$. Функція $g(x) = x^2\psi(x)$ – опукла вгору або вниз і не спадає для $x \geq 1$. Тоді для $\sigma \to \infty$ справедлива рівність

$$E(\hat{L}^{\psi}_{0,1}, S_{\frac{2\pi}{\sigma}})_{\hat{1}} = A(\tau_\sigma) + O\Big(\frac{3\psi(\sigma)}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3}\Big).$$

Доведення. Виберемо функцію $\tau_\sigma(x)$ таким чином

$$\tau_\sigma(x) = \begin{cases} x^2\psi(\sigma x)\dfrac{\pi x - \sin \pi x}{\pi x^3}, & x \in [0; 1], \\ \psi(\sigma x), & x \in [1; \infty). \end{cases} \qquad (2)$$

У теоремі 1 [4] доведено сумовність $\hat{\tau}_\sigma(t)$ і показано, що $\hat{\tau}_\sigma(t) = O(1)t^{-2}$ для $t \to \infty$. Звідси випливає сумовність функції $\hat{\tau}^*_\sigma(t)$ для $|t| > A$.

Розглянемо величину $a(\tau_\sigma)$, інтегруючи двічі частинами і враховуючи, що

$\tau_\sigma(0)=\tau'_\sigma(0)=\tau_\sigma(\infty)=\tau'_\sigma(\infty)=0$,

маємо

$$a(\tau_\sigma)=\int\limits_{|t|\ge\frac{\pi\sigma}{2}}\Big|\int\limits_0^\infty \tau_\sigma(x)\cos xt dx\Big|dt=$$

$$=2\int\limits_{t\ge\frac{\pi\sigma}{2}}\Big|\int\limits_0^\infty \tau_\sigma(x)\cos xt dx\Big|dt=$$

$$=2\int\limits_{t\ge\frac{\pi\sigma}{2}}\Big|-\int\limits_0^\infty \tau'_\sigma(x)\frac{\sin xt}{t}dx\Big|dt=$$

$$=2\int\limits_{t\ge\frac{\pi\sigma}{2}}\Big|\int\limits_0^\infty \tau'_\sigma(x)\frac{\cos xt}{t^2}\Big|_0^\infty-$$

$$-\int\limits_0^\infty \tau''_\sigma(x)\frac{\cos xt}{t^2}dx\Big|dt\le;$$

$$\le 2\int\limits_{t\ge\frac{\sigma\pi}{2}}\frac{1}{t^2}\{|\tau'_\sigma(1-0)-\tau'_\sigma(1+0)|-$$

$$-\int\limits_0^1|\tau''_\sigma(x)|dx-\int\limits_1^\infty|\tau''_\sigma(x)|dx\}dt.$$

Розглянемо кожен доданок окремо.

З урахуванням того, що функція $x^2\psi(x)$ не спадає для $x\ge1$ та $|\psi'(x)|x^2\le 2\psi(x)x$, маємо

$$|\tau'_\sigma(1-0)|=(\sigma\psi'(\sigma)+\psi(\sigma))\le K3\psi(\sigma);$$

$$|\tau'_\sigma(1+0)|=\sigma|\psi'(\sigma)|=\frac{\sigma|\psi'(\sigma)|}{\sigma^2}\sigma^2\le 2\psi(\sigma);$$

$$\int\limits_0^1|\tau''_\sigma(x)|dx\le\int\limits_0^1|F''(x)\psi(\sigma x)x^2|dx+$$

$$+2\int\limits_0^1|F'(x)(\psi(\sigma x)x^2)'|dx+\int\limits_0^1|d\tau'_\sigma(x)|\le$$

$$\le K(3\psi(\sigma)+\frac{1}{\sigma^2});$$

$$\int\limits_1^\infty|\tau''_\sigma(x)|dx=\int\limits_1^\infty(F'(x)\psi(\sigma x)x^2)'|dx\le$$

$$\le K|\sigma\psi'(\sigma)|.$$

Остаточно маємо

$$a(\tau_\sigma)\le 2\int\limits_{t\ge\frac{\sigma\pi}{2}}\frac{1}{t^2}K(3\psi(\sigma)+\frac{1}{\sigma^2})dt\le$$

$$\le K(\frac{3\psi(\sigma)}{\sigma}+\frac{1}{\sigma^3}). \qquad (3)$$

Враховуючи співвідношення (1) і (3), одержуємо твердження теореми.

Розглянемо більш загальний випадок $\beta\ne0$.

Теорема 2. Нехай $\psi\in F'$, $\varphi\in\Phi$, $F\in H$. Функція $g(x)=x^2\psi(x)$ – монотонна для $x\ge1$ та опукла вгору або вниз. Тоді для $\sigma\to\infty$ справедлива рівність

$$E(\hat{L}^\psi_{\beta,1},S_{\frac{2\pi}{\sigma}})_{\hat{1}}=\frac{\pi|\sin\frac{\beta\pi}{2}|}{3\sigma^2}\int\limits_1^\sigma x\psi(x)dx+$$

$$+O(3\psi(\sigma)+\sigma|\psi'(\sigma)|+\frac{|\psi'(\sigma)|}{\sigma\psi(\sigma)}+$$

$$+\frac{1}{\sigma^2}+\int\limits_\sigma^\infty\frac{\psi(x)}{x}dx).$$

Доведення. Нехай функцію $\tau_\sigma(x)$ задано співвідношенням (2). У праці [4] показано сумовність функції $\hat{\tau}_\sigma(t)$, причому доведено, що $\hat{\tau}_\sigma(t)=O(1)t^{-2}$ для $t\to\infty$. Отже, для $|t|>A$ функція $\hat{\tau}^*_\sigma(t)$ сумовна.

У тій самій праці було отримано оцінку

$$E(\hat{C}^\psi_{\beta,\infty},U_\sigma^{\varphi,F})=$$

$$=\frac{2|F(0)\sin\frac{\beta\pi}{2}|}{\pi\varphi(\sigma)}\int\limits_1^\sigma\frac{\varphi(x)\psi(x)}{x}dx+O(\psi(\sigma)+$$

$$+\frac{1}{\varphi(\sigma)}+\sigma|\psi'(\sigma)|+\frac{\sigma|\psi'(\sigma)|}{\varphi(\sigma)\psi(\sigma)}+$$

$$+\frac{\sigma\varphi'(\sigma)\psi(\sigma)}{\varphi(\sigma)}+\int\limits_\sigma^\infty\frac{\psi(x)}{x}dx). \qquad (4)$$

Ця оцінка справедлива і для операторів Стеклова як операторів вигляду $U_\sigma^{\varphi,F}$.

Оцінку величини $a(\tau_\sigma)$ легко отримати, використовуючи ті самі міркування, що й у теоремі 1.

Оскільки функція $g(x)=x^2\psi(x)$ монотонна, то

$$a(\tau_\sigma)\le K(\frac{3\psi(\sigma)}{\sigma}+|\psi'(\sigma)|+\frac{1}{\sigma^3}). \qquad (5)$$

Порівнюючи співвідношення (4), (5), бачимо, що порядок величини $a(\tau_\sigma)$ менший, ніж порядок залишкового члена співвідношення (4).

З урахуванням рівності (1) та вибором функцій $\varphi(x)$, $F(x)$ одержуємо твердження теореми 2.

Теорема 3. Нехай $\psi\in\mathcal{M}_C$, $\varphi\in\Phi_1$ (тобто для всіх x справедлива нерівність $\varphi'(x)x\le K\varphi(x)$), $F\in H$. Функція $g(x)=x^2\psi(x)$ – монотонна для $x\ge1$ та опукла вгору або вниз. Тоді для $\sigma\to\infty$ справедлива рівність

$$E(\hat{L}{}^{\psi}_{\beta,1}, S_{\frac{2\pi}{\sigma}})_{\overset{\wedge}{1}} = \frac{\pi|\sin\frac{\beta\pi}{2}|}{3\sigma^2}\int_1^{\sigma} x\psi(x)dx +$$

$$+ O(\psi(\sigma) + \frac{1}{\sigma^2}).$$

Для $\beta \neq 2k$, $k \in Z$ ця рівність забезпечує розв'язання задачі Колмогорова-Нікольського за таких умов:

1. $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\psi(x) = \infty$, $\psi(\sigma) = O(\int_1^{\sigma} x\psi(x)dx)$ для $\sigma \to \infty$.

2. $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\psi(x) = C, \quad C \neq 0$.

3. $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\psi(x) = 0$, $\int_1^{\infty} x\psi(x)dx = \infty$.

Доведення цього твердження наводити не будемо, проте зауважимо, що воно повторює доведення відповідного твердження з праці [5].

Висновки

Вивчено наближення операторами Стеклова функцій класів $\hat{L}{}^{\psi}_{\beta,1}$. Одержано оцінки верхніх меж відхилень $E(\hat{L}{}^{\psi}_{0,1}, S_{\frac{2\pi}{\sigma}})_{\overset{\wedge}{1}}$ і $E(\hat{L}{}^{\psi}_{\beta,1}, S_{\frac{2\pi}{\sigma}})_{\overset{\wedge}{1}}$, що у деяких важливих випадках є асимптотичними рівностями.

Наведено умови, за яких асимптотична рівність для функцій $\psi \in \mathcal{M}_C$ і операторів Стеклова забезпечує розв'язок задачі Колмогорова–Нікольського.

Аналогічні результати можна отримати без використання операторів вигляду $U_{\sigma}^{\varphi,F}$, що значно ускладнить розв'язання поставленої задачі.

Наведені методи вивчення наближень функцій класів $\hat{L}{}^{\psi}_{\beta,1}$ в інтегральній метриці можуть бути застосовані також для операторів Зигмунда та Рогозинського.

Список літератури

1. *Степанец А.И.* Приближение целыми функциями в равномерной метрике / Приближение целыми функциями на действительной оси. – К., 1988. – С. 3–41. – (Препр. / АН УССР. Ин-т математики; 88.27).
2. *Степанец А.И.* Классы функций, заданных на действительной оси, и их приближения целыми функциями // Укр. мат. журн. – 1990. – 41, № 1. – С. 102–112.
3. *Дзимистаришвили М. Г.* Приближение классов $\hat{L}{}^{\psi}_{\beta,1}$ в метрике L_1 // Гармонический анализ и развитие аппроксимационных методов. – К.: Ин-т математики АН УССР, 1989. – С. 52–54.
4. *Репета Л. А.* Приближение классов функций $\hat{C}{}^{\psi}_{\beta,\infty}$ операторами вида $U_{\sigma}^{\varphi,F}$ // Ряды Фурье: теория и приложения. – К.: Ин-т математики АН Украины, 1992. – С. 105–111.
5. *Репета Л. А.* Приближение классов непрерывных функций операторами вида $U_{\sigma}^{\varphi,F}$ // Наближення класів неперервних функцій, заданих на дійсній осі. – К., 1994. – С. 16–35. – (Препр. / АН України. Ін-т математики; 94.5).
6. *Новиков О. А.* Приближение классов непрерывных периодических функций линейными методами. – К., 1991. – С. 3–38. (Препр./ АН УССР. Ин-т математики; 91.21).

Стаття надійшла до редакції 06.10.04.

В. К. Репета, Л. А. Репета

Приближение функций классов $\hat{L}{}^{\psi}_{\beta,1}$ операторами Стеклова

Исследовано поведение верхних граней уклонений (ψ,β)-дифференцируемых функций от операторов Стеклова как частного случая операторов вида $U_{\sigma}^{\varphi,F}$ в интегральной метрике с помощью інтегральных представлений этих уклонений от линейных операторов.

V. K. Repeta, L. A. Repeta

The approximation of the functions from the $\hat{L}{}^{\psi}_{\beta,1}$ classes by Steklov's operators

The behavior of the upper bounds of the deviations of the (ψ,β)-varied functions of Steklov's operators, which are the particular case of the operators of the form $U_{\sigma}^{\varphi,F}$ in the integral metric, was investigated using the integral representation of those deviations from the linear operators.